การคำนวณหาระยะทางการเคลื่อนที่และหาค่าพลังงานการเคลื่อนที่ของวิถีวงโคจรของอนุภาค

วัชรพงษ์ พลสนาม[1] และ อาทิตย์ หู้เต็ม [1*]
Watcharapong Polsanam1[1] and Artit Hutem1[2]
[1] สาขาวิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์
83 หมู่ 11 ถนนสระบุรี-หล่มสัก ตำบลสะเดียง อำเภอเมือง จังหวัดเพชรบูรณ์ 67000 1
[*] artithutem@pcru.ac.th

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ได้พัฒนากระบวนการเกี่ยวกับการคำนวณหาระยะทางการเคลื่อนที่และหาค่าพลังงานการเคลื่อนที่ของวิถีวงโคจรของอนุภาค ซึ่งได้ศึกษาเส้นโค้งที่เคปเลอร์ คาดว่าเป็นวงโคจรของดาวอังคารที่มีการตระหนักถึงความเป็นวงโคจรที่เกิดขึ้นภายใต้แรงเข้าสู่ศูนย์กลาง โดยนำวิธีการเคลื่อนที่ของวัตถุภายใต้การเคลื่อนที่แบบหมุนที่มีอิทธิพลของแรงที่น่าสนใจอาจแกว่งเท่ากันในแนวตั้งกับแกนหมุนของวัตถุขึ้นและลง การสั่นสะเทือนตามแนวตั้งอาจจะทำให้วัตถุมีพิกัดอื่นที่นอกเหนือจากการหมุนพิกัด ในการคำนวณหาระยะทางการเคลื่อนที่และหาค่าพลังงานการเคลื่อนที่ของวิถีวงโคจรของอนุภาค การหาระยะทางการเคลื่อนที่โดยพิจารณาการเคลื่อนของอนุภาคภายใต้แรง ใช้ทฤษฎีการหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์อีกวิธีหนึ่งใช้รอนสเกียนและเทคนิคการอินทิเกรตทีละส่วน การหาค่าพลังงานการเคลื่อนที่ของวิถีวงโคจรของอนุภาคโดยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันและการอินทิเกรตทีละส่วน และนำไปแสดงกราฟโดยใช้โปรแกรม Mathematica เปรียบเทียบของระยะทางการเคลื่อนที่ และค่าพลังงานของวงโคจรของอนุภาค

คำสำคัญ: แรงเข้าสู่ศูนย์กลาง, ระยะทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค, พลังงานการโคจรของอนุภาค

Abstract

In this research, researcher developed the theory about computing the movement distance and find energy value of movement in the orbit of particle. Researcher studied the about of Kepler's theory, it was expected that it is orbit of Mars. That it realized about the orbit that appears under the power move into the central. Hideyuki Ide and Hiroshi Nakazato, they have been used A.E. Edison's research for studied about the objects under rotational motion. This direction is interested power

and the same swing in upright about object's spindle both up and down. The shake along with upright can made the objects that were another areas. In computing the movement distance and calculate energy value of movement in the orbit of particle. We was consider from Particle movement under, energy that use the theory of Differential equations, use Wronskian and we use the technique of integrate.

Keywords: central force, distance of movement, energy value of movement,

บทนำ

การเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ในระบบสุริยะ คือ กฎความโน้มถ่วงสากลของนิวตันก่อนที่นิวตันจะตั้งกฎนี้ขึ้น โยฮัน เคปเลอร์ นักดาราศาสตร์ชาวเยอรมันเป็นผู้สะสมข้อมูลตำแหน่งของดาวเคราะห์ในปี ค.ศ 1609 ได้เสนอผลงานเป็นกฎ 2 ข้อดังนี้

ข้อที่ 1 กฎของวิถีการโคจร กล่าวว่า ดาวเคราะห์ทุกดวงโคจรรอบดวงอาทิตย์เป็นวงรี มีดวงอาทิตย์อยู่ที่จุดโฟกัสจุดหนึ่งของวงรีนั้น

ข้อที่ 2 กฎของพื้นที่ กล่าวว่า เส้นทางจากดวงอาทิตย์ถึงดาวเคราะห์ จะกวาดพื้นได้เท่ากันในเวลาเท่ากัน หลังจากนั้น เคปเลอร์ก็ได้เสนอกฎข้อที่ 3 คือ

ข้อที่ 3 กฎฮาร์มอนิก กล่าวว่า มีอัตราส่วนกำลังสองของเวลาการเคลื่อนที่ครบรอบ กับกำลังสามของครึ่งแกนเอกของวงโคจรของดาวเคราะห์ทุกดวงมีค่าเท่ากัน

การเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์โคจรรอบดวงอาทิตย์เป็นวงรี โดยมีดวงอาทิตย์เป็นจุดศูนย์กลางของวงโคจร ความเร็วในวงโคจรของดาวเคราะห์ไม่คงที่ ดาวเคราะห์เคลื่อนที่เร็วขึ้นเมื่อเข้าใกล้ดวงอาทิตย์และเคลื่อนที่ช้าเมื่อออกห่างจากดวงอาทิตย์ พื้นที่ของคาบวงโคจรของดาวเคราะห์จะแปรผันตามปริมาณของระยะห่างจากดวงอาทิตย์เสมอ ในปี ค.ศ. 2010 Hideyuki Ide และ Hiroshi Nakazato ได้ศึกษาเส้นโค้งที่ เคปเลอร์ คาดว่าเป็นวงโคจร ของดาวอังคารที่มีการ

ตระหนักถึงความเป็นวงโคจรที่เกิดขึ้นภายใต้แรงเข้าสู่ศูนย์กลาง (รศ.ดร.รัชนี รุจิวโรด2551.) ต่อมาในปี ค.ศ. 2013 A.E.Edison และคณะ ได้ศึกษาวัตถุภายใต้การเคลื่อนที่แบบหมุนมีอิทธิพลของแรงที่น่าสนใจอาจแกว่งเท่ากันในแนวตั้งเกี่ยวกับแกนหมุนของวัตถุขึ้นและลง การสั่นสะเทือนตามแนวตั้งอาจจะทำให้วัตถุมีพิกัดอื่นที่นอกเหนือจากการหมุนพิกัด แสดงให้เห็นถึงการวิเคราะห์และคุณภาพ

ในงานนี้ ผลกระทบจากการเคลื่อนที่ของแรงสั่นสะเทือนตามแนวตั้งของวัตถุซึ่งเกิดจากแรงสั่นสะเทือนจากพลังงานทั้งหมดที่วัตถุอยู่ในขณะนี้คือผลรวมของพลังงานในแนวรัศมีและพลังงานสั่น ผลการทดลองแสดงให้เห็นว่าพลังงานทั้งหมดมีค่าเป็นลบ (A. Arya 1990)

ต่อจากนี้จะอาศัยกฎแรงโน้มถ่วงของนิวตันอธิบายว่า กฎดังกล่าวข้างต้นเป็นจริง โดยเริ่มจากมองดวงอาทิตย์และดาวเคราะห์ดวงหนึ่งเป็นระบบ 2 อนุภาคที่อยู่โดดเดี่ยวซึ่งมีแรงดึงดูดระหว่างดวงดาวทั้งคู่ มีทิศในแนวเส้นผ่านศูนย์กลาง คุณสมบัติที่สำคัญอย่างหนึ่งของแรงในแนวศูนย์กลาง (central force) คือ เป็นแรงอนุรักษ์ ตัวอย่างของแรงในแนวผ่านศูนย์กลาง ได้แก่ แรงดึงดูดระหว่างมวล (แรงโน้มถ่วง) แรงระหว่างประจุไฟฟ้า แรงดึงดูดระหว่างโมเลกุล ฯลฯ อนุภาคที่เคลื่อนที่ภายใต้แรงในแนวศูนย์กลางจะมีลักษณะการเคลื่อนที่เป็นระนาบและมีการโคจรในลักษณะต่าง ๆ กัน ได้แก่ วงรี พาราโบลา เป็นต้น สามารถอธิบายการเกิดปรากฏการณ์ต่างๆในธรรมชาติ

การเคลื่อนที่แบบวงกลม เกิดขึ้นเมื่อวัตถุที่กำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็วในทิศทางหนึ่ง ๆ แต่ขณะเดียวกันก็มีแรงดึงวัตถุ โดยทิศทางของแรงที่ดึงนั้นตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ของวัตถุตลอดเวลา จะทำให้เส้นทางการเคลื่อนที่ของวัตถุเปลี่ยนเป็นวงกลม โดยเราจะเรียกแรงที่คอยดึงอยู่นั้นว่า "แรงเข้าสู่ศูนย์กลาง $\left(\vec{F}_c\right)$

ในงานวิจัยนี้เราจึงได้ทำการคำนวณหาระยะทางการเคลื่อนที่และหาค่าพลังงานการเคลื่อนที่ของวิถีวงโคจรของอนุภาค การหาระยะทางการเคลื่อนที่โดยพิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคภายใต้แรง $f\left(r\right)$(A.E.Edison 2013, H. Ide and H. Nakazato 2010) ใช้ทฤษฎีการหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์ เราสามารถหาระยะทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคได้อีกวิธีหนึ่งโดยใช้รอนสเกียนและ

เทคนิคการอินทิเกรตทีละส่วน และสามารถหาค่าพลังงานการเคลื่อนที่ของวิถีวงโคจรของอนุภาคภายใต้แรงในแนวผ่านศูนย์กลาง $f(r)$ โดยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันและการอินทิเกรตทีละส่วน

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อศึกษาการเคลื่อนที่ของอนุภาคภายใต้แรงในแนวผ่านศูนย์กลาง $f(r)$ และคำนวณหาพลังงานรวมของ อนุภาคที่อยู่ภายใต้พลังงานศักย์ที่ได้จากแรงในแนวผ่านศูนย์กลาง

การคำนวณหาสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคภายใต้แรงในแนวผ่านศูนย์กลางที่เป็นฟังก์ชันอินเวอร์สของระยะทาง

เมื่ออนุภาคมีเคลื่อนที่ภายใต้แรงในแนวศูนย์กลางมีการเคลื่อนที่ในระนาบ การบอกตำแหน่งของอนุภาคนั้นจึงเลือกใช้ระบบพิกัดเชิงขั้ว สมการการเคลื่อนที่จะบอกในเทอมของ r และ θ ซึ่งแรงในแนวศูนย์กลางมีทิศตามแนวรัศมี (r) เท่านั้นดังนั้นจึงมีแต่ความเร่งในแนวรัศมี (a_r)และความเร่งในแนวตั้งฉากกับรัศมี (a_θ)มีค่าเป็นศูนย์ เราจึงใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตันในการคำนวณหาระยะทางการเคลื่อนที่โคจรของอนุภาค ดังนี้

$$\sum F = ma$$

$$f(r)\hat{e}_r = m\left(\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{e}_\theta\right) \tag{3}$$

จากสมการที่ (3) เราพิจารณาสมการในแนวรัศมี เมื่ออนุภาคมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงในแนวศักย์กลางจะมีโมเมนตัมเชิงมุม($L = mr^2\dot{\theta} =$ โมเมนตัมเชิงมุม) รอบจุดกำเนิดคงตัว และจะได้ว่า

$$\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = -\frac{m}{l_1^2u^2} f\left(\frac{1}{u}\right) \tag{4}$$

โดยที่ $u = \frac{1}{r}$ และ r เป็นระยะทางการโคจรของอนุภาค, l_1 คือ โมเมนตัมเชิงมุมที่ปรับสเกล เราจะคำนวณหาระยะทางการเคลื่อนที่โคจรโดยนำสมการแรงในแนว

ผ่านศูนย์กลาง $f(r)=\left[-\frac{1}{r^2}\left(k+\frac{1}{4\left(1-e^2\right)^2}\right)-\frac{\lambda}{r^3}\right]$ แทนลงในสมการที่ (4) และใช้เทคนิคสมการเชิงอนุพันธ์ในการคำนวณด้วย จะได้

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\left(1-\frac{\lambda\mu}{l^2}\right)=\frac{\mu k}{l^2}+\frac{\mu}{4l^2\left(1-e^2\right)^2} \tag{5}$$

กำหนดให้ $\eta=\frac{\mu k}{l^2}+\frac{\mu}{4l^2\left(1-e^2\right)^2}, \beta^2=\left(1-\frac{\lambda\mu}{l^2}\right)$ สมการที่ 5 เปลี่ยนได้เป็น

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+\beta^2u=\eta \tag{6}$$

$$u(\theta)=A\cos\left(\sqrt{1-\frac{\lambda\mu}{l^2}}\theta-\delta\right)+\left(\frac{\mu k}{\left(l^2-\lambda\mu\right)}+\frac{\mu}{4l^2\left(1-e^2\right)^2\left(1-\frac{\lambda\mu}{l^2}\right)}\right)$$

เราทำการกลับ $u(\theta)$ จะได้ ระยะทางการโคจรของอนุภาค ดังนี้

$$r=\frac{1}{A\cos\left(\sqrt{1-\frac{\lambda\mu}{l^2}}\theta-\delta\right)+\left(\frac{\mu k}{\left(l^2-\lambda\mu\right)}+\frac{\mu}{\left(1-e^2\right)^2\left(4l^2-4\lambda\mu\right)}\right)} \tag{7}$$

โดยที่ A เป็น แอมพลิจูด, δ, λ เป็นพารามิเตอร์, e เป็นสัมประสิทธิ์ของความรี

การคำนวณหาค่าพลังงานการเคลื่อนที่ของอนุภาคภายใต้พลังงานศักย์ที่ได้จากแรงในแนวผ่านศูนย์กลาง

จากการที่แรงในแนวศูนย์กลางเป็นแรงอนุรักษ์ พลังงานรวมของอนุภาค (E) ย่อมคงตัวดังสมการ $E=T+V$ เราพิจารณาความเร็วของอนุภาคในระบบพิกัด

เชิงขั้ว และพลังงานศักย์ต้องเป็นฟังก์ชันของแรงในแนวผ่านศูนย์กลาง $f(r)$ ดังนั้น

$$\frac{2m}{l_1^2}\left(E-V(r)\right)=\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2 \qquad (8)$$

จากสมการที่ 8 สามารถคำนวณหาค่าพลังงานการเคลื่อนที่ของอนุภาคภายใต้พลังงานศักย์ที่ได้จากแรงในแนวผ่านศูนย์กลางโดยหาค่าพลังงานศักย์ยังผลก่อนโดยการอินทิเกรต $f(r)$ และหาอนุพันธ์ของพลังงานศักย์ยังผลเทียบระยะทางต่ำสุด จะได้ระยะทางต่ำสุดนำไปแทนลงในสมการที่ 8 และใช้เทคนิคสมการเชิงอนุพันธ์ในการคำนวณด้วย จะได้

$$E=\frac{l^2}{2m}\left[-A\sqrt{1-\frac{\lambda\mu}{l^2}}\sin\left(\sqrt{1-\frac{\lambda\mu}{l^2}}\theta-\delta\right)\right]^2$$
$$+\frac{l^2}{2m}\left[A\cos\left(\sqrt{1-\frac{\lambda\mu}{l^2}}\theta-\delta\right)+\left(\frac{\mu k}{\left(l^2-\lambda\mu\right)}+\frac{\mu}{\left(1-e^2\right)^2\left(4l^2-4\lambda\mu\right)}\right)\right]^2$$

(9)

นำสมการที่ 7 และ 9 ไปพล็อตกราฟในหัวข้อต่อไป

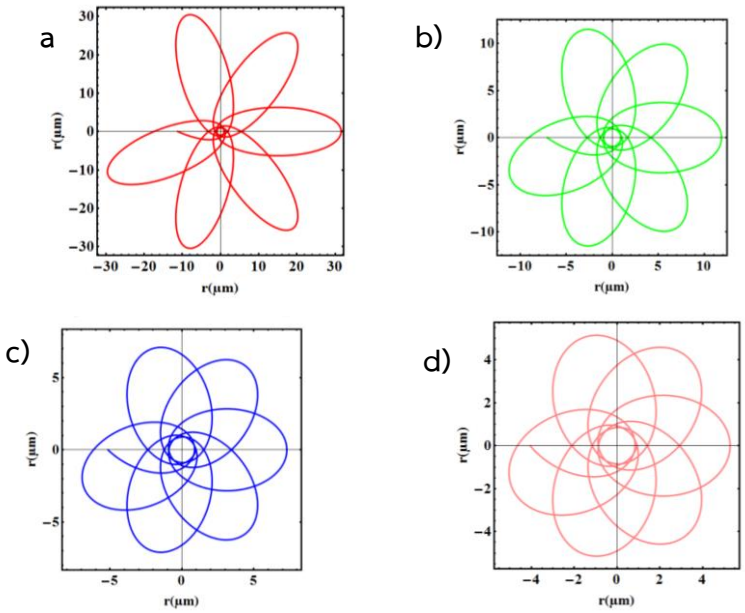
ผลการวิจัยและอภิปรายผล

สมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคภายใต้แรงในแนวผ่านศูนย์กลาง โดยใช้เทคนิคการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เอกพันธุ์ หาระยะทางการเคลื่อนที่อยู่ภายในแนวผ่านศูนย์กลาง $f(r)$ ของอนุภาคภายใต้แรงในแนวผ่านศูนย์กลาง ศักย์ยังผลและพลังงานรวมของอนุภาคที่อยู่ภายใต้พลังงานศักย์ที่ได้จากแรงในแนวผ่านศูนย์กลาง $f(r)$ และนำไปแสดงกราฟโดยใช้โปรแกรม Mathematica

- กราฟแสดงการเปรียบเทียบของระยะทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคในแนวผ่านศูนย์กลาง

ค่า k แปรเปลี่ยน $\lambda, e_1, A_0, \mu, L_1, \delta$ คงที่

ดังสมการที่ 7 เมื่อระยะทางการเคลื่อนของอนุภาคในแนวผ่านศูนย์กลาง จะได้กราฟดังนี้



รูปที่ 1 ระยะทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคในแนวผ่านศูนย์กลาง ค่า k แปรเปลี่ยน $\lambda, e_1, A_0, \mu, L_1, \delta$ คงที่ ของ a) ค่า k เปลี่ยน เท่ากับ 0.25, b) ค่า k เปลี่ยน เท่ากับ 0.30, c) ค่า k เปลี่ยน เท่ากับ 0.35 และ d) ค่า k เปลี่ยน เท่ากับ 0.40

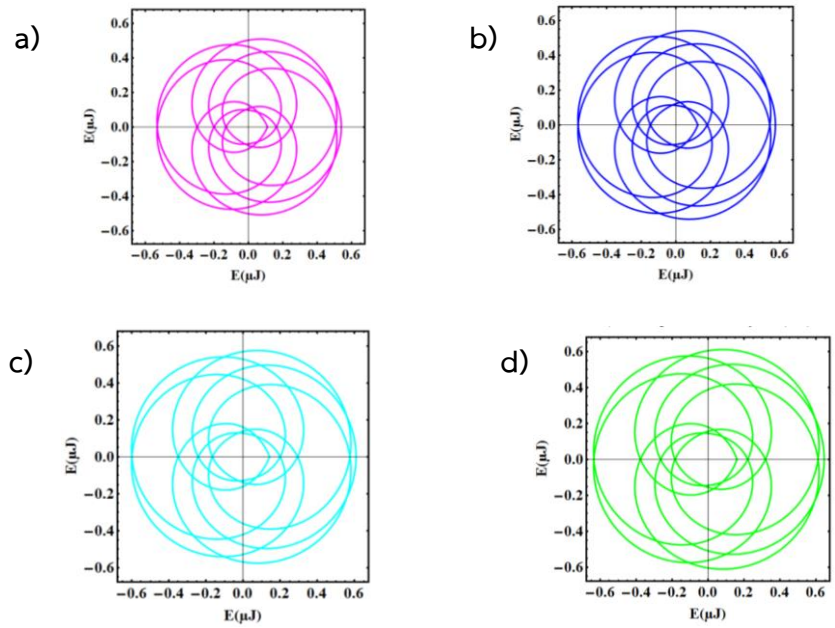
จากรูปที่ 1 เมื่อค่า k เพิ่มจะทำให้ระยะการเคลื่อนที่ของอนุภาคแบบวิถีโค้งลดลงและมีวงโคจรของอนุภาคเพิ่มขึ้น

- กราฟแสดงการเปรียบเทียบของพลังงานรวมของอนุภาคที่อยู่ภายใต้พลังงานศักย์ที่ได้จากแรงในแนวผ่านศูนย์กลาง

ค่า k แปรผัน $e, A, \mu, L, \delta, m, \lambda$ คงที่

ดังสมการที่ 9 เมื่อพลังงานจลน์และพลังงานศักย์มีค่าไม่คงที่เพราะมีแรงเสียดทานไปต้านการเคลื่อนที่ของอนุภาค งานของแรงเสียดทานจะทำให้พลังรวมไม่คงที

เมื่อพลังงานจลน์และพลังงานศักย์มีค่าไม่คงที่เพราะมีแรงเสียดทานไปต้านการเคลื่อนที่ของอนุภาค งานของแรงเสียดทานจะทำให้พลังรวมไม่คงที



รูปที่ 2 พลังงานรวมของอนุภาคที่อยู่ภายใต้พลังงานศักย์ที่ได้จากแรงในแนวผ่านศูนย์กลาง ค่า k แปรเปลี่ยน $e, \lambda, A, \mu, L, \delta, m, \lambda$ คงที่ ของ a) ค่า $k = 0.20$ b) ค่า $k = 0.22$ c) ค่า $k = 0.24$ และ d) ค่า $k = 0.26$

จากรูปที่ 2 เมื่อเพิ่มค่า k จะทำให้พลังงานรวมของอนุภาคที่อยู่ภายใต้พลังงานศักย์ที่ได้จากแรงในแนวผ่านศูนย์กลางเพิ่มขึ้น

สรุปผลการวิจัย

เมื่อค่า λ แปรเปลี่ยน $k, e_1, A_0, \mu, L_1, \delta$ คงที่ เมื่อค่า λ เพิ่มขึ้น จะทำให้ระยะการเคลื่อนที่ของอนุภาคแบบวิถีโค้งลดลงแต่มีวงโคจรการเคลื่อนที่เพิ่มขึ้น เมื่อค่า k แปรเปลี่ยน $\lambda, e_1, A_0, \mu, L_1, \delta$ คงที่ เมื่อค่า k เพิ่มจะทำให้ระยะการเคลื่อนที่ของอนุภาคแบบวิถีโค้งลดลงและมีวงโคจรของอนุภาคเพิ่มขึ้นเมื่อค่า μ

แปรเปลี่ยน $k, \lambda, e_1, A_0, L_1, \delta$ คงที่ เมื่อค่า μ เพิ่มขึ้น จะทำให้ระยะทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคในแนวผ่านศูนย์กลางลดลงและมีจำนวนรอบของวงโคจรของอนุภาคเพิ่มขึ้นเมื่อค่า L_1 ลดลง จะทำให้ระยะทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคในแนวผ่านศูนย์กลางลดลงและมีจำนวนรอบของวงโคจรของอนุภาคเล็กลง

เมื่อค่า k, λ แปรผัน $e_1, A_0, \mu, L_1, \delta, m$ คงที่ เมื่อเพิ่มค่า k และลดค่า λ จะทำให้พลังงานรวมของอนุภาคที่อยู่ภายใต้พลังงานศักย์ที่ได้จากแรงในแนวผ่านศูนย์กลางเพิ่มขึ้นและมีค่าระยะห่างของจำนวนวงโคจรลดลง เมื่อค่า e_1, μ แปรผัน $k, \lambda, A_0, L_1, \delta, m$ คงที่ เมื่อเพิ่มค่า e_1, μ จะทำให้พลังงานรวมของอนุภาคที่อยู่ภายใต้พลังงานศักย์ที่ได้จากแรงในแนวผ่านศูนย์กลางเพิ่มขึ้นและมีค่าระยะห่างของจำนวนวงโคจรมีขนาดใหญ่ขึ้น เมื่อค่า A_0, L_1 แปรผัน $k, e_1, \lambda, \mu, \delta, m$ คงที่ เมื่อเพิ่มค่า A_0, L_1 จะทำให้พลังงานรวมของอนุภาคที่อยู่ภายใต้พลังงานศักย์ที่ได้จากแรงในแนวผ่านศูนย์กลางลดลงและมีค่าระยะห่างของจำนวนวงโคจรเพิ่มขึ้น และเมื่อค่า m แปรผัน $k, e_1, \lambda, A_0, \mu, L_1, \delta$ คงที่ เมื่อเพิ่มค่า m จะทำให้พลังงานรวมของอนุภาคที่อยู่ภายใต้พลังงานศักย์ที่ได้จากแรงในแนวผ่านศูนย์กลางลดลง

กิตติกรรมประกาศ

พวกเราขอขอบคุณสาขาวิชาฟิสิกส์ และคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ที่ให้การสนับสนุนด้านคอมพิวเตอร์ และเวลาในการทำงานวิจัย

เอกสารอ้างอิง

รศ.ดร.รัชนี รุจิวโรด. กลศาสตร์ 1. สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 2551.

A. Arya, *Introduction to Classical Mechanics*, Prentice hall, Englewood cliff, New Jersey, 1990.

A.E.Edison, *Lagrange's equations of motion for oscillating central-force field, Theoretical Mathematics&Applications*, vol.3,no.2, 2013.

H. Ide and H. Nakazato, Kepler's Quartic Curve is Implemented by a Cantral force, International mathematical forum, 5, 2010.